الاحتمال والتحليل التوافقي:

مثال: صندوق فيه 8 كرات حمراء و 9 سوداء و 3 بيضاء، فاذا سحبت 3كرات على التوالي وبدون ارجاع،
ما هو احتمال ان تكون:

- الكرات الثلاثة حمراء ،
- واحدة من كل لون،
- الكرات الثلاثة بيضاء،
- على الاقل 1 بيضاء،
- كرتان حمراء وواحدة بيضاء،
- بالترتيب (R1, W2, B3) .

الحل:

1) الطريقة الاولى

- $P(R_1.R_2.R_3) = P(R_1).P(R_2|_{R_1}).P(R_3|_{R_1.R_2}) = \left(\frac{8}{20}\right).\left(\frac{7}{19}\right).\left(\frac{6}{18}\right) = \frac{336}{6840} = \frac{14}{285} = 0.0491$

وهكذا لباقي المطاليب

2) طريقة التوافيق

- $P(R_1.R_2.R_3) = P(3R) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{14}{285} = \frac{\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}}{\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}} = 0.0492$
- $P(3W) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{1140} = \frac{\frac{3\times2\times1}{3\times2\times1}}{\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}} = 0.000877$
- $P(2R.\ 1W) = \frac{\binom{8}{2}\binom{3}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{7}{45} = \frac{\frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{3}{1}}{\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}} = 0.0737$

- على الاقل واحدة بيضاء يمكن ايجادها بأحد الطريقتين

نوجد الكرات غير البيضاء
$$P(\overline{W})=\frac{\binom{20-3}{3}}{\binom{20}{3}}=\frac{34}{57}$$

نوجد المطلوب
$$P(1W, or\ 2w, or\ 3w)=P(1w)+P(2w)+P(3w)$$
$$=1-P(\overline{W})=1-\frac{34}{57}=\frac{23}{57}$$

او بالطريقة
$$P(1w)+P(2w)+P(3w)=P(1w2\overline{w})+P(2w1\overline{w})+P(3w)$$
$$=\frac{\binom{3}{1}\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{3}{2}\binom{17}{1}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{3}{3}\binom{17}{0}}{\binom{20}{3}}=\frac{23}{57}$$

- $P(1R1W1B)=\dfrac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}}=\dfrac{18}{95}$
- $P(R_1.W_2.B_3)=P(R_1).P(W_2|_{R_1}).P(B_3|_{R_1.W_2})=\left(\frac{8}{20}\right).\left(\frac{3}{19}\right).\left(\frac{9}{18}\right)=\frac{3}{95}$

الاحتمال بطريقة الرسم (شجرة القرار)

مثال: صندوق يحتوي على ***3*** كرات حمراء و***2*** زرقاء و***1*** خضراء، سحبت منه كرتان عشوائيا وعلى التوالي، ما هو احتمال:-

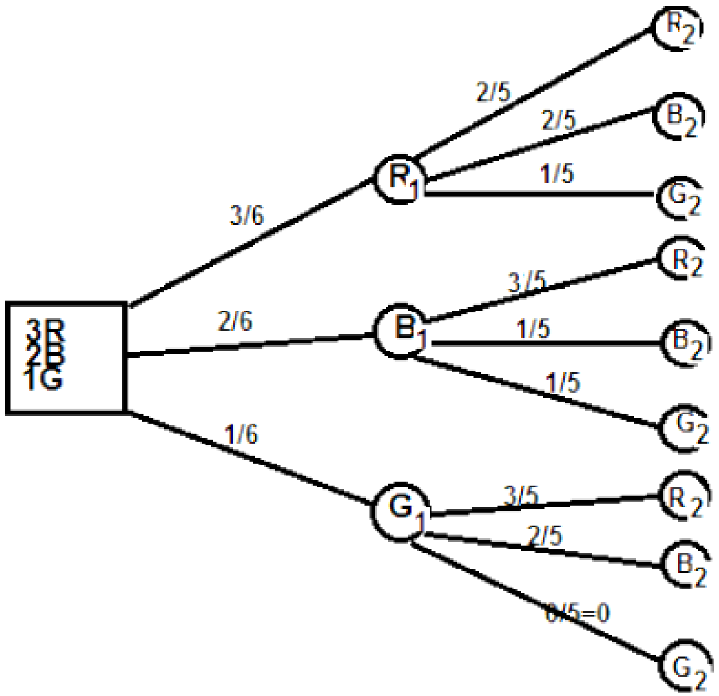
أ- أن تكون الكرتان زرقاوان؟

ب- أن تكون الأولى زرقاء والثانية خضراء؟

ت- أن لا تكون أي منهما حمراء؟

ث- أن تكون الثانية حمراء؟

الحل:



a- $P(B_1 \cap B_2) = 2/6 \times 1/5 = 2/30 = 0.0667$

b- $P(B_1 \cap G_2) = 2/6 \times 1/5 = 2/30 = 0.0667$

c- $P(G_1G_2) + P(B_1G_2) + P(G_1B_2) + P(B_1B_2)$

$= 0 + 2/30 + 2/30 + 2/30 = 6/30 = 0.20$

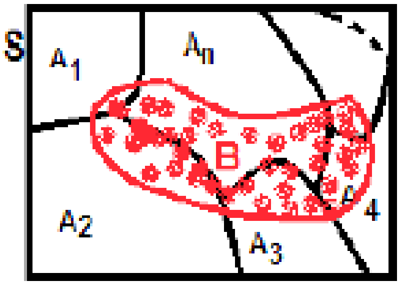
d- $P(G_1R_2) + P(B_1R_2) + P(R_1R_2) =$

$= 1/6 \times 3/5 + 2/6 \times 3/5 + 3/6 \times 2/5$

$= 3/30 + 6/30 + 6/30$

$= 0.50$

نظرية باز Bay's Theorm



اذا كان $A_1, A_2, A_3,\ldots, A_n$ تمثل حوادث متنافية او شاملة وان B هو حدث معين بحيث ان احتماله لا يساوي صفر ($P(B) \neq 0$) فان:

$$P(A_i|_B) = \frac{P(A_i).P(B|_{A_i})}{P(A_1).P(B|_{A_1}) + P(A_2).P(B|_{A_2}) + \cdots + P(A_n).P(B|_{A_n})}$$

مثال: مصنع يتكون من ثلاثة أقسام A_1, A_2, A_3 ، ينتج القسم A_1 50% من الإنتاج الكلي من المصابيح ومتوسط نسبة المعاب له 3% ، و ينتج القسم A_2 30% من الإنتاج الكلي ومتوسط نسبة المعاب له 4% بينما ينتج القسم A_3 20% من الإنتاج الكلي ومتوسط نسبة المعاب له 5%. فإذا أخذنا مصباحا بصورة عشوائية ودون تحيز من إنتاج المصنع كله ووجد بأنه معاب، اوجد احتمال أن هذا المصباح المعاب هو من إنتاج القسم A_1 ؟

الحل:

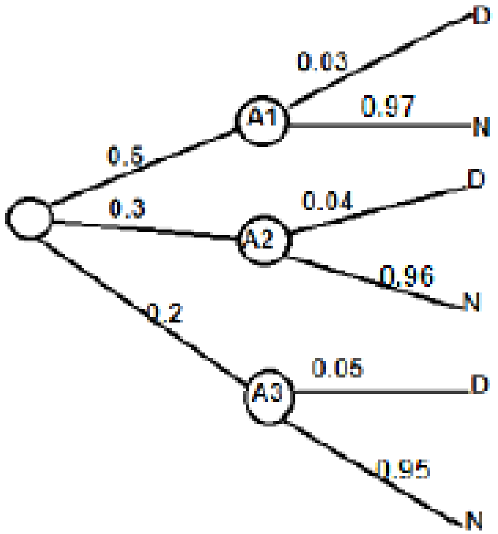
نفرض ان الحدث D يمثل ان المصباح معاب
نفرض ان الحدث N يمثل ان المصباح صالح

$$P(D) = P(A1).\ P(D|A1) + P(A2).\ P(D|A2) + P(A3)\ .\ P(D|A3)$$

احتمال ان المصباح المعاب من انتاج القسم A1 هو $P(A1|\ D\ ) =$

$$P(\ A1|D) = \frac{P(A1).P(D|A1)}{P(D)} = \frac{0.5\ x\ 0.03}{0.5x0.03+0.3x0.04+0.2x0.05}$$

$$= \frac{0.015}{0.037} = \frac{15}{37} = 0.40541$$



احتمالية ان يكون المصباح المعاب من انتاج القسم A يمثل نسبة المصابيح المعابة في القسم نفسه (A) على نسبة المصابيح المعابة للمصنع ككل.

مثال: تقدم طلاب ثلاث مدارس لاداء امتحان مادة اللغة الانكليزية في السنة النهائية وكان عدد المتقدمين من المدرسة الاولى 60 طالبا ومن الثانية 90 ومن الثالثة 100 طالب. وكانت نسب النجاح بعد اداء الامتحان هي 70% و 60% و 50% للمدارس الثلاث على التوالي. فاذا اختير طالباً بشكل عشوائي من بين الطلبة وكان من الناجحين فما هو احتمال ان يكون من المدرسة الثانية؟

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum_{1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

نفرض المدرسة الاولى (A3) والثانية (A2)والثالثة (A3)   نسبة النجاح هي B

P(A1)=60, P(A2)=90, P(A3)=100.

$P(B|A1)$ =70%=0.7, $P(B|A2)$ =60%=0.6, $P(B|A3)$ =50%=0.5.

$$P(A2|B) = \frac{P(A2).P(B|A2)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum_{1}^{n} P(A_i).P\left(\frac{B}{A_i}\right) = P(A1).P(B|A1) + P(A2).P(B|A2) + P(A3).P(B|A3) = 60 * 0.7 + 90 * 0.6 + 100 * 0.5 = 146$$

عدد الناجحين من المدرسة الثانية \ عدد الناجحين الكلي

$$P(A2|B) = \frac{P(A2).P(B|A2)}{P(B)} = \frac{90 \times 0.6}{146} = 0.37$$

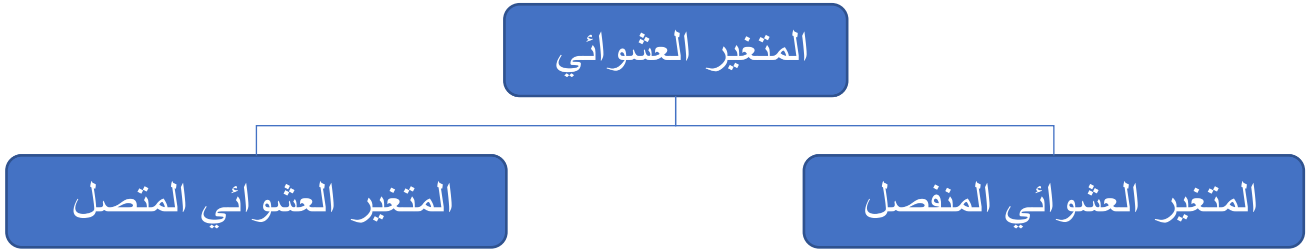
التوزيع الاحتمالي فصل8

المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها الاحتمالية

المتغيرالعشوائي: هو المفردة من العينة او المجتمع المراد دراسته. فان كانت المدرسة مجتمع الدراسة فان الطالب هو المفردة. سمي عشوائياً لانه يتم اختياره بالصدفة دون سابق تخطيط . كذلك في بعض التجارب لا تهمنا النتيجة التي نحصل عليها لكن ينصب اهتمامنا على متغير معين ترتبط قيمته بكل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية. فمثلا عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات ويكون اهتمامنا منصباً على عدد الاوجه التي ستظهر عندها سيكون عدد الاوجه هو المتغير العشوائي لانه يتغير من نتيجة الى اخرى. اذا المتغير العشوائي هو عدد الاوجه التي ستظهر عند رمي قطعة النقود 3 مرات متتالية.

يسمى المتغير منفصلا عندما تكون قيمه 0، 1 ،2، 3،........ اي ان هناك فراغا بين الصفر والواحد والتي هي الكسور ....

اما ان كانت القيم بالكسور فالمتغير يسمى متصلا. 1.1، 1.01، 1.02 وهكذا



مثال: تجربة رمي قطعة النقود 3 مرات وان y هي عدد ظهور الصورة H فان :

فضاء العينة f(E)	HHH	HHT	HTH	THH	TTH	THT	HTT	TTT
قيمة y	3	2	2	2	1	1	1	0

ان احتمال عدم ظهور صورة P(TTT) هي= P(H=0) = P(y=0) حيث ان y المتغير الذي يمثل عدد الصور الظاهرة، وهي خلية من الخلايا الثمان بجدول فضاء العينة أعلاه.

$P(y=0)=P(3T)=P(TTT)= P(T).\ P(T).\ P(T)= (1/2)(1/2)(1/2)= (1/2)^3 = 1/8$

$P(y=1)=P(1H,2T)= P(HTT)+ P(THT)+ P(TTH)= (1/8)+(1/8)+(1/8)= 3/8$

$P(y=2)=P(2H,1T)= P(HHT)+ P(THH)+ P(HTH)= (1/8)+(1/8)+(1/8)= 3/8$

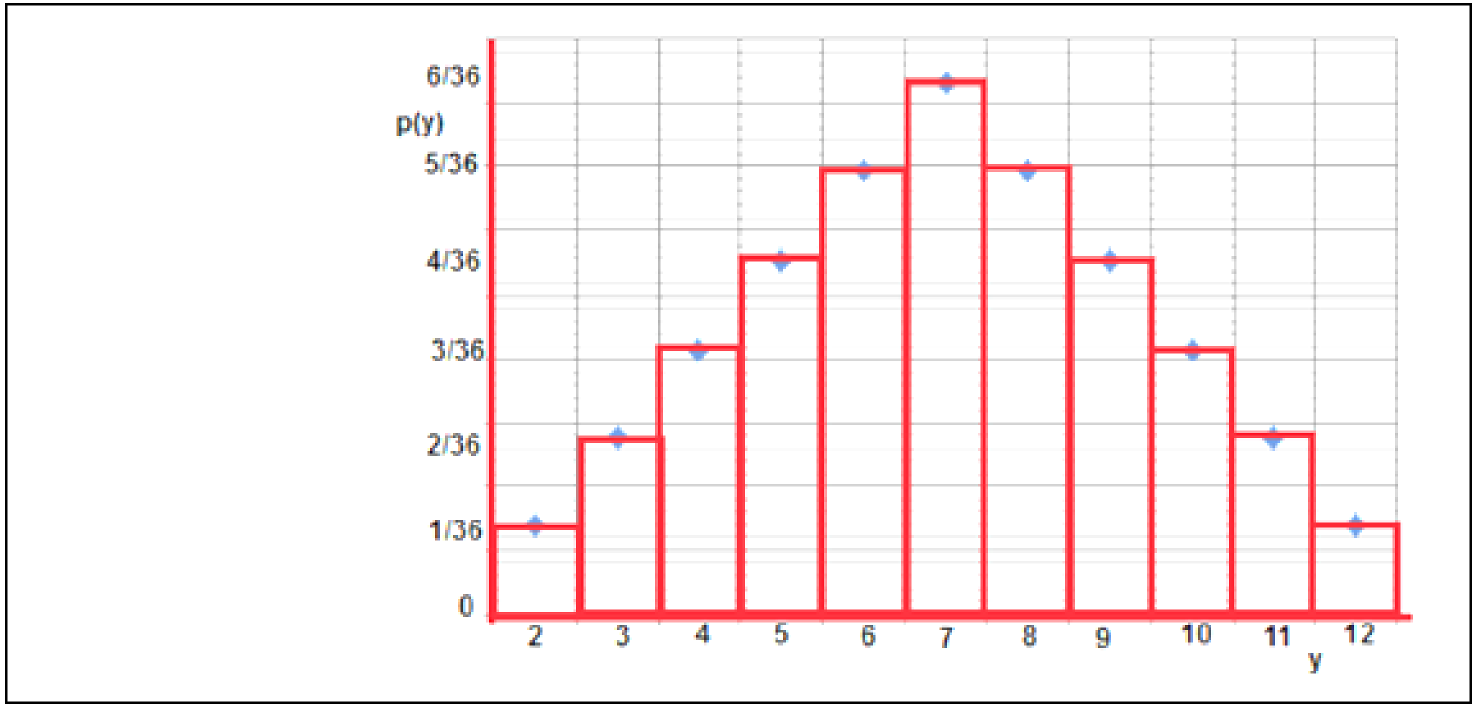
$P(y=0)=P(3H) = 1/8$

والتوزيع الاحتمالي لهذه التجربة هو

y	0	1	2	3
P(y)	1/8	3/8	3/8	1/8

مثال (2): في تجربة رمي نردين ، اذا كان المتغير y يمثل مجموع القيم الظاهرة على النردين، ففضاء التجربة هو:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12



والتوزيع الاحتمالي للتجربة هو

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(y)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

2 التوزيع الاحتمالي للمتغيرات المتقطعة

هي مجموعة القيم الممكنة مع الاحتمالات المرتبطة بقيم المتغير. نرمز للمتغير بحرف كبير وللقيم التي تأخذها المتغيرة بحرف صغير. نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(Y = y)$ ونكتب أيضا : $f(y)$. وتسمى الدالة $f(y)$ دالة الكثافة الاحتمالية.

مثال 2. التوزيع الاحتمالي ل y، عدد مرات الصورة في رميتين لقطعة نقدية:

y	0	1	2	Σ
P(Y = y)	1/4	2/4	1/4	1

مثال 3. جد قانونا (**p.d.f**) للتوزيع الاحتمالي لعدد الصور عند رمي قطعة نقود 4 مرات.

الحل: عدد نقاط فضاء العينة هو

H T . . . H T

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$

بموجب قانون التوافيق يمكن حساب دالة الكثافة الاحتمالية لعدد الصور **y=0, 1, 2,..., 4** وفق الاتي:

$$f(y) = \frac{\binom{4}{y}}{16}$$

لينتج لدينا التوزيع الاحتمالي المبين بالجدول الاتي:

y	0	1	2	3	4
f(y)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

3 شروط دالة الكثافة للمتغيرات المتقطعة

تعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(Y = y)$ ونكتب أيضا : $f(y)$ وتسمى الدالة $f(y)$ دالة الكثافة الاحتمالية. لكي يمكن اعتبار دالة ما، أيا كانت، دالة كثافة احتمالية يجب أن يتحقق شرطان اثنان:

1) $f(y) \geq 0$

2) $\sum f(y) = 1$

مثال: نأخذ دالة الكثافة ل Y نتيجة لإلقاء حجر نرد: $f(1) = f(2) = f(3) = \dots f(6) = 1/6 \geq 0$,
الشرط الأول محقق، والشرط الثاني أيضا لأن: $\Sigma f(y) = 1/6 + 1/6 + \dots + 1/6 = 6(1/6) = 1$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & y = 1,2,3,4,5,6 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

4 التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية ل م ع المتقطعة

يمثل المتغير العشوائي المتقطع ليس من خلال منحنى ولكن من خلال أعمدة متوازية على محور X.
مثال: نمثل بيانيا منحنيات دوال الكثافة ل Y المعرفة على إلقاء قطعة نقدية مرتين.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & y = 0,2 \\ \frac{1}{2}, & y = 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

y	0	1	2	Σ
P(Y = y)	1/4	2/4	1/4	1

المتغيرالعشوائي المتصل(المستمر): هو المتغير الذي يمكن ان يأخذ اي قيمة في فترة معينة، اي تكون القيم التي يمكن ان ياخذها المتغير العشوائي متصلة ببعضها البعض اي انها مستمر في تلك الفترة. فهي غير قابلة للعد.

مثال: اذا كان المتغير يمثل مستوى ارتفاع منسوب مياه الامطار خلال موسم مطري معين. فلو فرضنا ان اقل مستوى كان 2سم و اعلى مستوى كان 14سم. هنا بقية القيم التي بين القيمتين ممكن ان تكون 2.07 سم او 7.2سم او 10.432سم و هكذا. وبهذا تكون قيم المتغير متصة ومستمر وليس هناك فترة انقطاع في قيمها. ولهذا يطلق على هذا النوع من المتغيرات العشوائية بالمتصلة.

مثال2: تم تسجيل درجات حرارة جدار معين بتواريخ مختلفة حيث كانت درجات الحرارة ما بين 0 و 56 درجة. فاذا تم اختيار درجة حرارة واحدة من بين هذه الدرجات ورمزنا لها بالرمز y فسنجد ان درجة الحرارة ممكن ان تكون بين 30 و 40 او اي قيمة مصورة بينهما كــ ($35.3\ ^{o}C$).

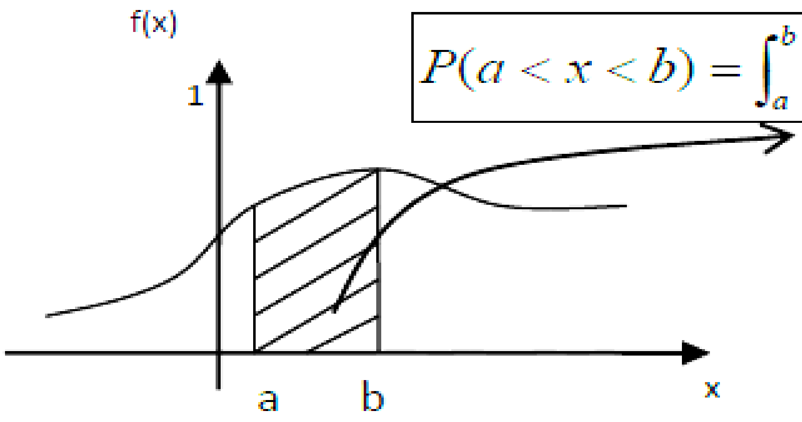
مفهوم المتغيرات العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي

6 تعريف المتغيرات العشوائية المستمرة

هي متغيرة ع تأخذ عددا لا متناهيا من القيم في مجال محدود، أو هي تأخذ أي قيمة داخل هذا المجال. من أجل هذا فأن وحدات قياس المتغيرات المستمرة تكون مستمرة مثل الزمن، الوزن، المسافة، الحجم، ...

7 التوزيع الاحتمالي المستمر

هو مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرات ع المستمرة والاحتمالات الملحقة بها. نسمي توزيعا كهذا دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة الاحتمال، وهي ممثلة بمنحنى متصل.
لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر. $P(X=x) \to 0$ لذلك فإن دالة الكثافة تستعمل لحساب احتمال مجال. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال.



$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

رسم3 التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المستمرة

لاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغيرة ع المتقطعة.

مفهوم المتغيرات العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي

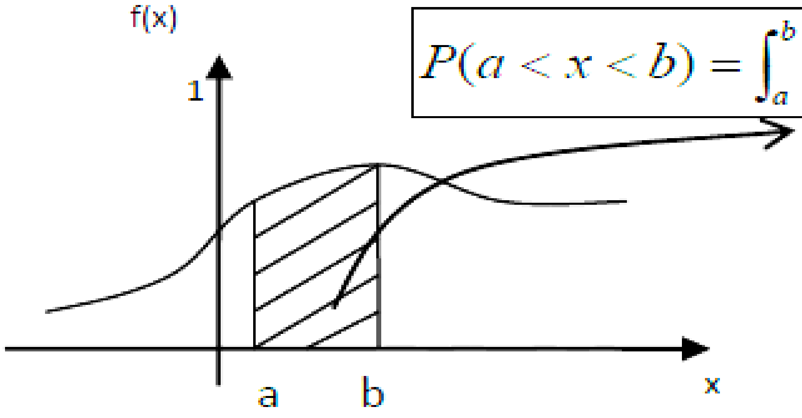
6 تعريف المتغيرات العشوائية المستمرة

هي متغيرة ع تأخذ عددا لا متناهيا من القيم في مجال محدود، أو هي تأخذ أي قيمة داخل هذا المجال. من أجل هذا فأن وحدات قياس المتغيرات المستمرة تكون مستمرة مثل الزمن، الوزن، المسافة، الحجم، ...

7 التوزيع الاحتمالي المستمر

هو مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرات ع المستمرة والاحتمالات الملحقة بها. نسمي توزيعا كهذا دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة الاحتمال، وهي ممثلة بمنحنى متصل.
لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر. $P(X=x) \to 0$ لذلك فإن دالة الكثافة تستعمل لحساب احتمال مجال. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$



رسم3 التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المستمرة

لاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغيرة ع المتقطعة.

8 خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة

باستبدال إشارة التكامل بإشارة المجموع نجد أن شروط دالة الكثافة الاحتمالية للم ع المستمرة تكتب كما يلي :

$$1)\ f(x) \geq 0$$

$$2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

من البديهي إذا أن منحنى دالة الكثافة لا يمكن أن ينزل أسفل محور الم ع، كما أن المساحة الإجمالية بين المنحنى والمحور الأفقي تساوي الواحد.
هذه الخصائص تفيدنا في حساب احتمالات بعض المجالات من خلال احتمالات مجالات أخرى.

مثال: أوجد قيمة الثابت C التي تحقق الشرطين الأول والثاني لدالة الكثافة الاحتمالية في الدالة التالية:

- ✓ أحسب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال من 1 إلى 2.
- ✓ أحسب احتمال أن تكون X لا تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

$$f(x) = \begin{cases} Cx^3 & 0 < x < 3 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 => \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} Cx^2dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = 1 => C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9C = 1 => C = 1/9$$

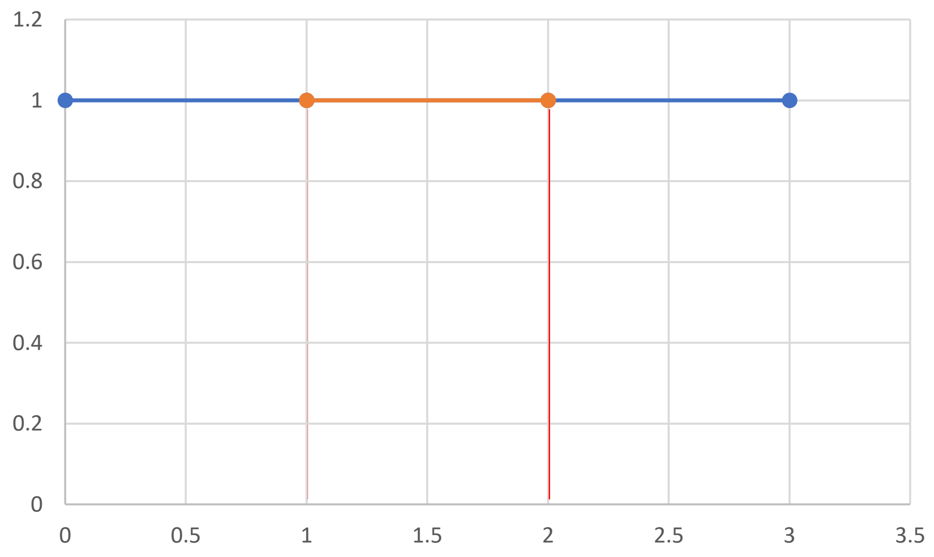
لكي تكون x دالة كثافة يجب أن يكون C = 1/9 .

$$P(1 < x \leq 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (1/9)x^2dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right] = \frac{7}{27}$$

$$P(1 > x > 2) = 1 - P(1 < x < 2) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

لو كانت الدالة السابقة كما ياتي فما هو احتمال ان تكون () تنتمي للمجال 1 الى 2

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 3 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



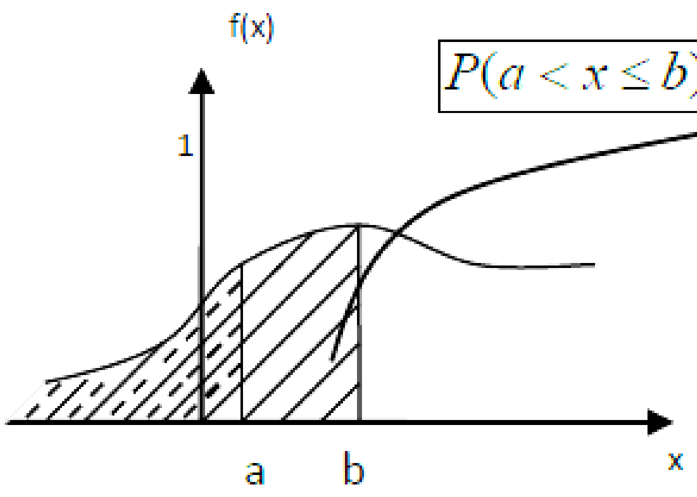
9 دالة التوزيع F(x) للمتغيرة العشوائية المستمرة

تعرف دالة التوزيع للمتغيرة المستمرة كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

لدالة التوزيع أهمية أكبر بالنسبة للمتغيرة المستمرة. السبب في ذلك أننا نهتم، في حالة المتغيرة المستمرة، باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأيسر التعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل في كل مرة. يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف X، بحيث a < b . لحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال]a, b] :

$$P(a < x \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$$



رسم 4 حساب الاحتمال من خلال دالة التوزيع

مثال:

أوجد دالة التوزيع للمتغيرة المذكورة في المثال السابق.

استخدم دالة التوزيع لحساب الاحتمال: P(1< x <2).

$$*\ x < 0: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du = 0$$

$$*\ 0 \le x < 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} \frac{1}{9}u^2 du = \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

$$*\ x \ge 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{3} \frac{1}{9}u^2 du + \int_{3}^{x} 0du = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 + 0 = \frac{27}{27} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/27 & 0 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

$$P(1 < x \le 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27}$$